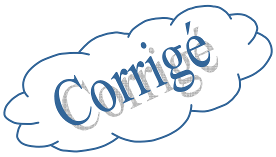
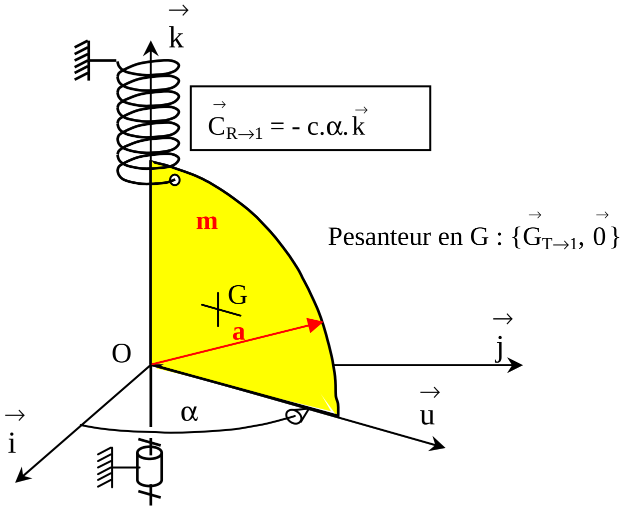
EXERCICE 7 : GIROUETTE CONSTITUEE D'UN QUART DE DISQUE.

$R_1\ (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

$R_0\ (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

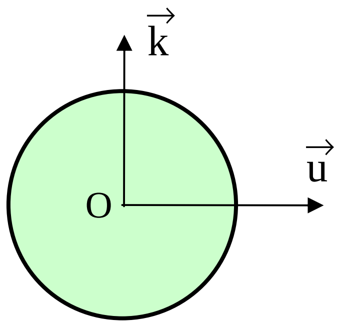




Q1 Déterminer la matrice d'inertie $\mathbf{I}(O,S_1)$ exprimée dans le repère R_1.

➢ Recherche des moments d'inertie

Moment d'inertie d'un disque complet de masse $\mathbf{4 \cdot m}$

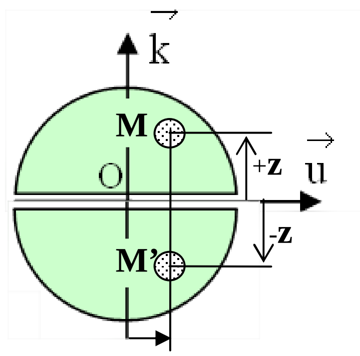


$$I_{Ov} = \int_{Disq} (z^2 + x^2) \cdot dm = \frac{(4 \cdot m) \cdot a^2}{2}$$

et $$I_{Ou} = I_{Ok} = \int_{Disq} (x^2 + \cancel{y^2}) \cdot dm = \frac{(4 \cdot m) \cdot a^2}{4}$$

Moment d'inertie d'un demi-disque de masse $\mathbf{2 \cdot m}$

En utilisant les propriétés de symétrie, on voit que pour les éléments de surface situés symétriquement en M et en M', $\mathbf{z}$ et $\mathbf{x}$ sont les mêmes au signe près.



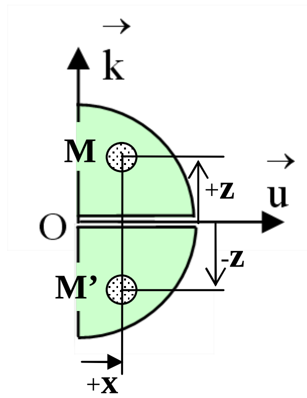
On en déduit que $(z^2 + x^2) \cdot dm$ est le même pour deux éléments de surface disposés symétriquement.

Ainsi $$\int_{1/2disq} (z^2 + x^2) \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \int_{Disq} (z^2 + x^2) \cdot dm$$

$$\Rightarrow I_{Ov} = \int_{1/2disq} (z^2 + x^2) \cdot dm = \frac{(2 \cdot m) \cdot a^2}{2}$$

Moment d'inertie d'un quart de disque de masse m

Le raisonnement est le même en utilisant les propriétés de symétrie.

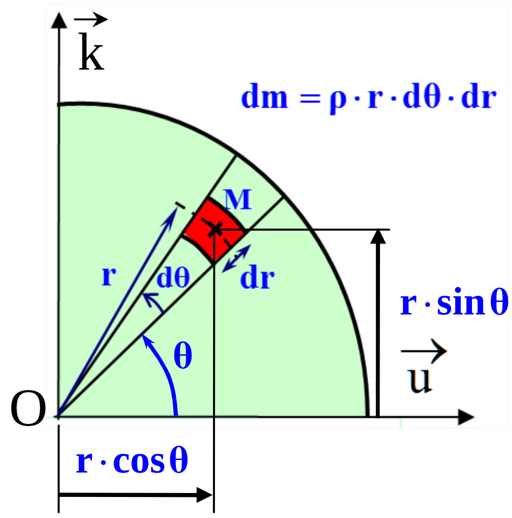


$$I_{Ov} = \int_{1/4disq} (z^2 + x^2) \cdot dm = \frac{m \cdot a^2}{2}$$ Homogénéité

$$\int_{1/4disq} z^2 \cdot dm = \int_{1/4disq} x^2 \cdot dm = = \frac{1}{2} \cdot \int_{1/4disq} (z^2 + x^2) \cdot dm$$

$$\Rightarrow I_{Ou} = I_{Ok} = \frac{m \cdot a^2}{4} \quad I_{Ou} = I_{Ok} = \frac{m \cdot a^2}{4}$$ Homogénéité

➢ **Recherche des produits d'inertie**



Le plan $(\vec{k}, O, \vec{u})$ est plan de symétrie.

Tous les produits qui contiennent la seconde composante seront donc nuls : $D = F = 0$

$$E = \int_{1/4disq} z \cdot x \cdot dm$$

$$= \int_{1/4disq} (r \cdot \sin\theta) \cdot (r \cdot \cos\theta) \cdot \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr$$

$$= \rho \cdot \int_{r=0}^{r=a} r^3 \cdot dr \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \rho \cdot \int_{r=0}^{r=a} r^3 \cdot dr \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (\frac{1}{2} \sin 2\theta) \cdot d\theta$$

$$= \rho \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \rho \cdot \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{2}\right) = \cancel{\rho} \cdot \frac{a^4}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\cancel{\rho} \cdot (\pi \cdot a^2) / \cancel{4}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{m \cdot a^2}{2 \cdot \pi}}$$

Homogénéité

$$\Rightarrow \mathbb{I}(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{m \cdot a^2}{4} & 0 & -\frac{m \cdot a^2}{2 \cdot \pi} \\ 0 & \frac{m \cdot a^2}{2} & 0 \\ -\frac{m \cdot a^2}{2 \cdot \pi} & 0 & \frac{m \cdot a^2}{4} \end{pmatrix}_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & 2 \cdot A & 0 \\ -E & 0 & A \end{pmatrix}_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}}$$

Q2 Déterminer le torseur cinétique $\{\mathscr{C}1/0\}$ de la plaque exprimé au point O.*

Calcul de la résultante cinétique : $\overrightarrow{R_c 1/0} = \overrightarrow{m \cdot V(G,1/0)}$

$$\overrightarrow{V(G,1/0)} = \overrightarrow{V(O,1/0)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega 1/0}$$

$$= -x_G \cdot \vec{u} \wedge \dot{\alpha}.\vec{k} = \dot{\alpha} \cdot x_G \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{R_c 1/0} = m \cdot \dot{\alpha} \cdot x_G \vec{v}}$$

Homogénéité

Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}$

> *Pendant la phase d'apprentissage, on écrira la relation complète <u>avec les indices du cours</u> avant de l'appliquer à notre problème et le cas échéant de la simplifier*
>
> *Relation du cours :* $\overrightarrow{\sigma_{A,1/0}} = \overline{\overline{I}}_{(A,S)} \times \overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \cdot \overrightarrow{V_{(A,1/0)}}$

Appliquée à notre problème cela donne ,

$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \overline{\overline{\mathbb{I}}}(O,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{V(O,1/0)}$ avec O un point fixe. $\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \overline{\overline{\mathbb{I}}}(O,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E\cdot\dot{\alpha} \\ 0 \\ A\cdot\dot{\alpha} \end{pmatrix}_{B_1}$$ ou encore, $$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = -E\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{u} + A\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{k}$$

Homogénéité

$$\Rightarrow \boxed{\{\mathscr{C}_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\cdot x_G\cdot\vec{v} \\ -E\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{u} + A\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{k} \end{matrix} \right\}_O}$$ ou encore autre écriture : $$\boxed{\{\mathscr{C}_{1/0}\} = {}_O\left\{ \begin{matrix} 0 & -E\cdot\dot{\alpha} \\ \dot{\alpha}\cdot x_G & 0 \\ 0 & A\cdot\dot{\alpha} \end{matrix} \right\}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}}$$

Q3 Déterminer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}1/0\}$ de la plaque exprimé au point O.*

Calcul de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_d 1/0} = m\cdot\overrightarrow{\Gamma(G,1/0)}$

$$\overrightarrow{\Gamma(G,1/0)} = \frac{d\overrightarrow{V(G,1/0)}}{dt/B_0} = \frac{d\overrightarrow{V(G,1/0)}}{dt/B_1} + \overrightarrow{\Omega 1/0} \wedge \overrightarrow{V(G,1/0)}$$

$$= \ddot{\alpha}\cdot x_G\vec{v} + \dot{\alpha}.\vec{k} \wedge \dot{\alpha}\cdot x_G\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\Gamma(G,1/0)} = \ddot{\alpha}\cdot x_G\cdot\vec{v} - \dot{\alpha}^2\cdot x_G\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{R_d 1/0} = m\cdot\ddot{\alpha}\cdot x_G\cdot\vec{v} - m\cdot\dot{\alpha}^2\cdot x_G\cdot\vec{u}}$$

Homogénéité

Calcul du moment dynamique : $\overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$

Relation du cours : $\overrightarrow{\sigma_{A,1/0}} = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A,1/0}}}{dt/B_0} + m\cdot\overrightarrow{V(A,1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G,1/0)}$

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt/B_0}$$ car O est un point fixe.

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt/B_1} + \overrightarrow{\Omega 1/0} \wedge \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} -E\cdot\ddot{\alpha} \\ 0 \\ A\cdot\ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -E\cdot\dot{\alpha} \\ 0 \\ A\cdot\dot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}} = \begin{pmatrix} -E\cdot\ddot{\alpha} \\ -E\cdot\dot{\alpha}^2 \\ A\cdot\ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = = \begin{pmatrix} -E\cdot\ddot{\alpha} \\ -E\cdot\dot{\alpha}^2 \\ A\cdot\ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}}$$

Homogénéité

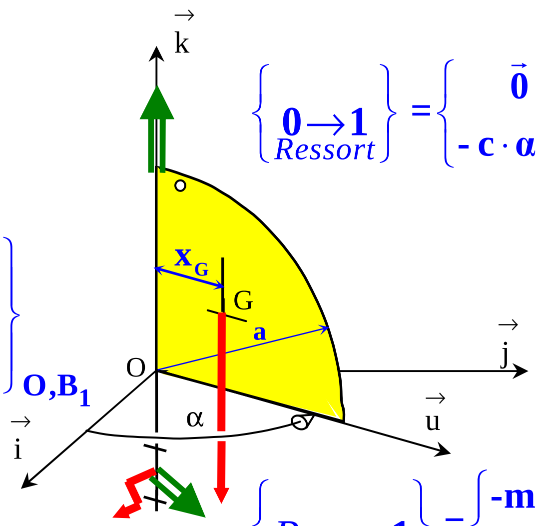
$$\Rightarrow \boxed{\{\mathscr{D}_{1/0}\} = {}_O\left\{ \begin{matrix} -m\cdot\dot{\alpha}^2\cdot x_G & -E\cdot\ddot{\alpha} \\ m\cdot\ddot{\alpha}\cdot x_G & -E\cdot\dot{\alpha}^2 \\ 0 & A\cdot\ddot{\alpha} \end{matrix} \right\}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}}$$

Q4 Déterminer les torseurs des actions mécaniques appliquées à S_1.*

➢ **<u>On isole S_1</u>.**

➢ **<u>Bilan des actions mécaniques</u>**
(B.A.M.E.)

$$\left\{ \underset{Pivot}{0 \to 1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{0\to1} & L_{O,0\to1} \\ Y_{0\to1} & M_{O,0\to1} \\ Z_{0\to1} & 0 \end{matrix} \right\}_{O,B_1}$$



$$\left\{ \underset{Ressort}{0 \to 1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ -c \cdot \alpha \cdot \vec{k} \end{matrix} \right\}_{\forall \text{le pt}}$$

$$\left\{ Pes. \to 1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} -m \cdot g \cdot \vec{k} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G}$$

Q5 Appliquer le P.F.D. et en déduire le torseur de l'action mécanique $\{O_{0\to1}\}$ transmise par la liaison pivot exprimé au point O. , ainsi que la loi d'évolution du paramètre α au cours du temps, sachant qu'on lâche la plaque, sans vitesse initiale, d'une position α_0.

➢ **<u>Ecriture du P.F.D</u>. au point O** (car on demande de déterminer les composantes de l'action transmise par la liaison pivot).

$$\overrightarrow{M_O Pes \to 1} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R\,Pes \to 1} = x_G \cdot (\vec{u} + \cancel{\vec{k}}) \wedge -m \cdot g \cdot \vec{k} = x_G \cdot (\vec{u} + \cancel{\vec{k}}) \wedge -m \cdot g \cdot \vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_O Pes \to 1} = \boxed{x_G \cdot m \cdot g \cdot \vec{v}}$$

Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R\,\bar{1} \to 1} = \overrightarrow{R_{d\,1/0}}$

$$\begin{array}{lll} (1) & X_{0\to1} & = -m \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot x_G \\ (2) & Y_{0\to1} & = m \cdot \ddot{\alpha} \cdot x_G \\ (3) & Z_{0\to1} - m \cdot g & = 0 \end{array}$$

← *5 équations permettant de déterminer les efforts de liaisons.*

Théorème du moment dynamique : $\overrightarrow{M_O\,\bar{1} \to 1} = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$

$$\begin{array}{lll} (4) & L_{0\to1} & = -E \cdot \ddot{\alpha} \\ (5) & M_{0\to1} + x_G \cdot m \cdot g & = -E \cdot \dot{\alpha}^2 \\ (6) & -c \cdot \alpha & = A \cdot \ddot{\alpha} \end{array}$$

← *Equation du mouvement*

Elle donne la relation entre l'effort extérieur appliqué et le paramètre du mouvement.

➢ **<u>Résultats</u>** On en déduit les actions transmises par la liaison pivot.

$$\boxed{\left\{ \underset{Pivot}{0 \to 1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -m \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot x_G & -E \cdot \ddot{\alpha} \\ m \cdot \ddot{\alpha} \cdot x_G & -E \cdot \dot{\alpha}^2 \\ m \cdot g & 0 \end{matrix} \right\}_{O,B_1}}$$

Homogénéité

Q5 (suite) En déduire la loi d'évolution du paramètre α au cours du temps, sachant qu'on lâche la plaque, sans vitesse initiale, d'une position α_0.

On cherche la solution de l'équation (6) : $\mathbf{A \cdot \ddot{\alpha} + c \cdot \alpha = 0}$

- Elle est de la forme (a) $\alpha = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t$ dont on calcule les dérivées :

$$(b) \quad \dot{\alpha} = -C_1 \cdot \omega \cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

$$(c) \quad \ddot{\alpha} = -C_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t - C_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

- Avec les conditions initiales :

A $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$ l'équation (a) $\Rightarrow$ $C_1 = \alpha_0$

$\dot{\alpha} = 0$ l'équation (b) $\Rightarrow$ $C_2 = 0$

Ainsi l'équation (a) devient : $\alpha = \alpha_0 \cdot \cos \omega t$ et l'équation (c) : $\ddot{\alpha} = -\alpha_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t$

En remplaçant α et $\ddot{\alpha}$ dans l'équation (6) : $\mathbf{A \cdot \ddot{\alpha} + c \cdot \alpha = 0}$, on obtient :

$$A \cdot (-\cancel{\alpha_0} \cdot \omega^2 \cdot \cancel{\cos \omega t}) + c \cdot (\cancel{\alpha_0} \cdot \cancel{\cos \omega t}) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{c}{A} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{c}{A}}}$$

D'où l'équation du mouvement : $\boxed{\alpha = \alpha_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{A}} \cdot t\right)}$

avec **c** la raideur de torsion du ressort,
et **A** le moment d'inertie du ½ disque par rapport à l'axe $(O, \vec{k})$.

<u>Remarque importante.</u>

Si la question avait été seulement la détermination de la loi de mouvement, l'application du P.F.D. se serait limitée à l'écriture d'une seule équation scalaire :

On aurait alors fallu écrire :
➢ **<u>P.F.D.</u>**

Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe $(O, \vec{k})$: $\overrightarrow{M_{O\,\bar{1} \to 1}} \cdot \vec{k} = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}} \cdot \vec{k}$

Ainsi seule l'équation (6) aurait été prise en compte.

$$\boxed{-c \cdot \alpha = A \cdot \ddot{\alpha} \leftarrow \textit{Equation du mouvement}}$$

Dans les exercices à venir, il faudra savoir choisir parmi les six équations du P.F.D, laquelle (lesquelles) choisir, pour répondre à la (aux) question(s) posée(s).